趣谈一道中考试题的12种解法

201808　上海市嘉定区教师进修学院　孙琪斌　201807　上海市嘉定区娄塘学校　朱文娟

早在20年前我们就发现有一类题目的证明方法时常成对出现! 也就是说假如在A点(如图1)可以通过作平行线构造基本图的策略找到一种解决方法, 那么在A点一定还存在着另外一种添加平行线的方法, 即这类题目或者有两种方法, 或者有4种方法, 或者有6种方法, 或者有8种方法$\cdots\cdots$ (证法成对出现).

利用这个证法成对出现的猜想, 研究2009年山东省潍坊市的一道中考题, 我们先后找到了12种方法. 也就是说在已知图形(图1)的每个点上都找到了两种证法; 更令我们开心的是, 当我们把这个证法成对的猜想告诉同学们之后, 一部分学生居然也能够发现12种方法.

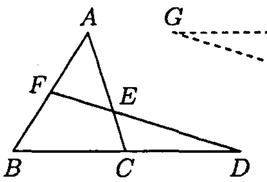

图 1

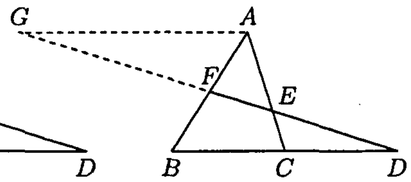

图 2

下面借助教学片段, 简述证法成对出现的缘由, 并给出12种方法的部分生成过程.

例题　(2009年山东省潍坊中考试题) 已知$\triangle ABC$, 延长BC到D, 使$CD=BC$. 取AB的中点F, 连结FD交AC于点E(如图1).

(1) 求$\dfrac{AE}{EC}$的值;

(2) 若$AB=a$, $FB=EC$, 求AC的长.

师: 欲求$\dfrac{AE}{EC}$, 我们可以尝试添加平行线构造基本图(A型图或X型图), 然后在所形成的A型图或X型图中寻找与$\dfrac{AE}{EC}$有关的比例式.

若过A点作$AG/\!/DB$交DF的延长线于点G(如图2), 则可得两个X型基本图(图3、图4).

看图3: $\because AG/\!/DB$, $\therefore \dfrac{AG}{BD}=\dfrac{AF}{BF}$. 又$\because AF=BF$, $\therefore AG=BD$.

看图4: $\because AG/\!/DC$, $\therefore \dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AG}{CD}$.

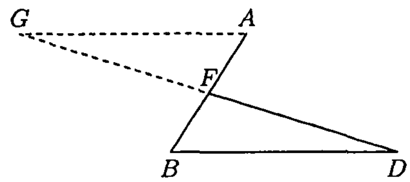

图 3

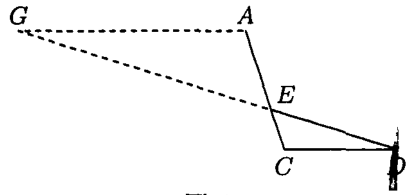

图 4

看图2: $\because CD=BC$, $\therefore BD=2CD$.

由此, 易得$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AG}{CD}=\dfrac{BD}{CD}=2$.

本文把这个方法称为方法1.

若过点A作$AG/\!/FD$交BD的延长线于点G(图5), 也可以得到两个A型基本图(图6、图7).

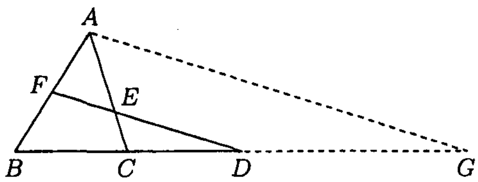

图 5

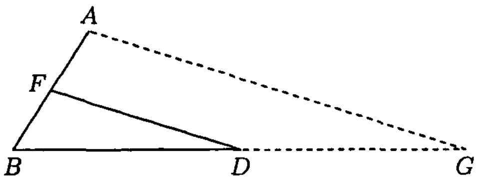

图 6

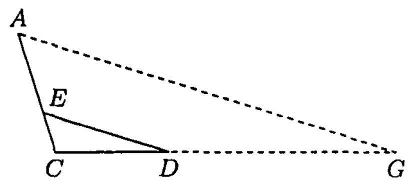

图 7

方法2: 看图6: $\because AG/\!/FD$, $\therefore \dfrac{BD}{DG}=\dfrac{BF}{AF}$. $\because AF=BF$, $\therefore BD=DG$.

看图7: $\because AG/\!/ED$, $\therefore \dfrac{AE}{EC}=\dfrac{DG}{CD}$.

看图5: 由$CD=BC=\dfrac{1}{2}BD$, 易得$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{DG}{CD}=\dfrac{BD}{CD}=2$.

(这时, 除了已经自主找到方法的学生之外, 我尚没有真正调动起更多学生的兴趣.)

师: 现在我们回过头来梳理梳理解题思路, 这道题的真正价值并不仅仅在于我们过A点发现了两种方法, 而在于"假如在点A通过作平行线可以找到一种解决方法, 那么在A点一定还存在着另外一种添加平行线的方法. 在A点一定存在两种证明方法, 即证法成对出现"!

生1: 证法成对出现? 什么是证法成对出现?

生2: 证法成对出现, 可能吗?

生3: 偶然的巧合吧.

师: (再次指向添加平行线之后形成的两类基本图—A型图、X型图), 在A点为什么存在两种方法呢? 或者说我们如何找到存在于点A的这两种方法呢?

师: 同学们只要仔细体会我们在A点添加三角形某条边的平行线所构造出的两类基本图(A型图与X型图), 就可以从中找到答案.

师: 如图1, 我们过A点作$AG/\!/DB$交DF的延长线于点G(如图2), 则可得到与三角形一边平行线有关的基本图—X型图(图3、图4); 过点A作$AG/\!/FD$交BD的延长线于点G(图5), 也可以得到与三角形一边平行线有关的一类基本图—A型图(图6、图7). 分别研究这两类基本图, 我们先后找到了两种解决问题的方法.

(有些学生仿佛明白了, 脸上呈现出若有所悟之后的喜悦, 但更多的同学则依然茫然, ……)

师: 大家不妨试一试, 看看这种证法成对出现的猜想在点B、C、D、E、F处是否存在? 我现在可以把我的研究结果告诉大家, 这道题目我已经找到了12种方法, 也就是说图形现有的每个点都存在着两种证明方法! 下面就看同学们能不能发现这些方法?

(至此, 学生的兴趣终于被激发出来了, 大家纷纷投入到发现、探究的行列中.)

师: (约5分钟后), 要不要我提示提示? 谁验证了这个证法成对出现的猜想?在哪个点?

生1: 不要提示.

生2: 再等一等, 我已经找到了一种方法.

生3: 老师, 你过来看看我的这条辅助线对不对? ……

师: (又过3分钟后)这样好不好, 我们一边交流大家现在已经发现的方法, 一边继续探究新的方法. 我们先来交流点B的两种方法, 谁来黑板上讲解自己的发现? ……

就这样, 我们一边交流一边研究, 一堂课就在这样的交流互动中飞快地结束了……

后来, 同事告诉我们, 有些同学居然在接下来的其他课堂上偷偷地做这个数学题……

下面我们简述这道中考试题的其他方法.

方法3: 过点B作$BG/\!/CA$, 交DF的延长线于点G(如图8). 易得$AE=BG$, $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{BG}{EC}=\dfrac{BD}{CD}=2$.

方法4: 过点B作$BG/\!/FD$, 交AC的延长线于点G(如图9). 易得$AE=EG$, $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{EG}{EC}=\dfrac{BD}{CD}=2$.

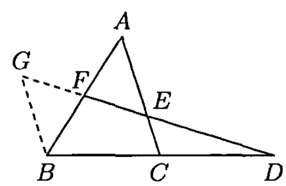

图 8

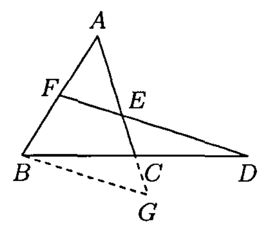

图 9

分析与反思: 过点B作$BG/\!/CA$交DF的延长线于点G, 可生成一个与$\dfrac{AE}{EC}$相关的A型图与一个X型图(如图8); 过点B作$BG/\!/FD$, 交AC的延长线于点G, 也可以生成一个与$\dfrac{AE}{EC}$相关的A型图与一个X型图(如图9), 这就恰如我们利用分组分解法进行因式分解一样, 只要分组之后的小组与小组之间依然存在公因式或可继续应用公式, 那么这种分组方法就值得继续尝试下去, 只要我们围绕有利于生成与$\dfrac{AE}{EC}$有关的比例式或有利于使用已知条件(如本题中的点F是AB的中点)添加三角形一边的平行线, 那么解决问题的方法可能就蕴含其中.

方法5: 过点C作$CG/\!/DF$, 交AB于点G(如图10).

易得$BG=FG$, $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AF}{FG}=2$.

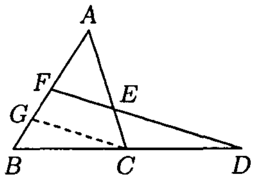

图 10

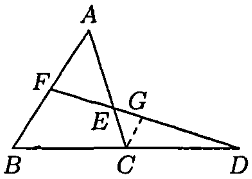

图 11

方法6: 过点C作$CG/\!/BA$, 交DF于点G(如图11). 易得$DG=FG$, $CG=\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}AF$, $\frac{AE}{EC}=\frac{AF}{CG}=2$.

方法7: 过点D作$DG/\!/AB$, 交AC的延长线于点G(如图12). 易得$AB=DG$, $AC=CG$, $AF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}DG$, $\frac{AE}{EG}=\frac{AF}{DG}=\frac{1}{2}$.

设$AE=k$, 则$EG=2k$, $AG=3k$, $AC=1.5k$, $EC=0.5k$. 所以, $\frac{AE}{EC}=2$.

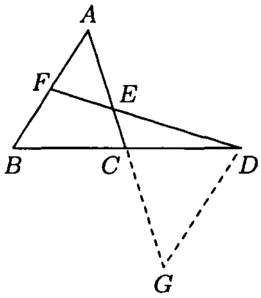

图 12

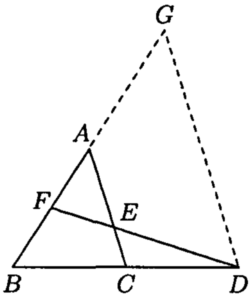

图 13

方法8: 过D点作$DG/\!/AC$, 交BA的延长线于点G(如图13), 易得

$$AB=AG,\ \frac{AC}{DG}=\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

$$\frac{AE}{DG}=\frac{AF}{FG}=\frac{1}{3}. \qquad (2)$$

$(2)\div(1)$, 得$\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$, 所以$\frac{AE}{EC}=2$.

方法9: 过F点作$FG/\!/AC$, 交BC于点G(如图14), 易得

$$BG=CG,\ \frac{FG}{AC}=\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

$$\frac{EC}{FG}=\frac{CD}{DG}=\frac{2}{3}, \text{即} \frac{EC}{FG}=\frac{2}{3}. \qquad (2)$$

$(1)\times(2)$, 得$\frac{EC}{AC}=\frac{1}{3}$, 所以$\frac{AE}{EC}=2$.

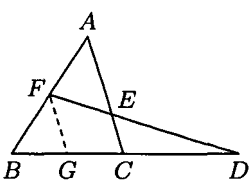

图 14

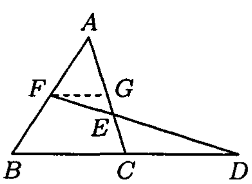

图 15

方法10: 过点F作$FG/\!/BC$, 交AC于点G(如图15), 易得

$$AG=CG,\ \frac{GE}{EC}=\frac{FG}{CD}=\frac{FG}{BC}=\frac{1}{2}.$$

设$GE=k$, 则$EC=2k$, $AG=CG=3k$, $AE=4k$, $\frac{AE}{EC}=2$.

方法11: 过点E作$EG/\!/CB$, 交AB于点G(如图16), 易得

$\frac{FG}{FB}=\frac{EG}{BD}=\frac{EG}{2BC}=\frac{AG}{2AB}=\frac{AG}{4FB}$, 所以, $AG=4FG$.

设$FG=k$, 则$AG=4FG=4k$, $BF=AF=3k$, $BG=2k$. $\frac{AE}{EC}=2$.

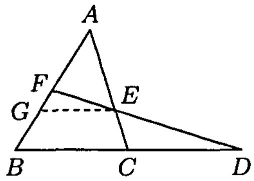

图 16

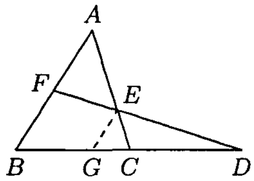

图 17

方法12: 过点E作$EG/\!/AB$, 交BC于点G(如图17), 易得

$\frac{CG}{BC}=\frac{CE}{AC}=\frac{EG}{AB}=\frac{EG}{2BF}=\frac{DG}{2DB}=\frac{DG}{4BC}$, $DG=4CG$.

设$CG=k$, 则$DG=4k$, $BC=CD=3k$, $BG=2k$, $\frac{AE}{EC}=\frac{BG}{CG}=2$.

趣味练习1: 如图18, $\triangle ABC$中, $BF=2AF$, $CD=DF$, 求证: $BE=3EC$.

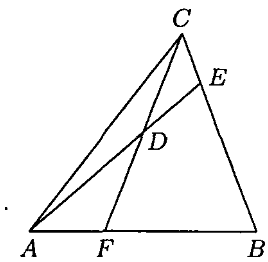

图 18

提示: 该题也有12种解法.

趣味练习2: 移动图18中的点F与点E的位置, 使他们分别成为AB、BC边的中点, 容易发现AE、CF的交点D其实就是$\triangle ABC$的重心, 由此, 我们可以回归到课本, 也可以从这个三角形重心的基本图中发现这类证法成对出现的问题原型以及系列问题变式, 如令E是$\triangle ABC$边BC的中点, $AF=\frac{1}{2}BF$, 即可以得到新问题(求

(下转第3-45页)

体现出测试的目标, 有利于促进整卷的有效性提升. 在2009年全国的中考试卷中, 很多省市地区对情境的设计作了积极探索, 如北京、辽宁等.

应该说, 情境的设计和使用不是孤立的, 应该与考核的目标、试题的难度、题型的运用相结合. 在情境的设计和使用中必须注意如下问题:

1. 问题的情境不能与实际生活情境等同. 数学问题的来源既可能来源于我们的生活实际, 也可能来源于数学的内部. 所以在问题情境的设计上, 不要过分依靠实际情境. 只要能充分体现考核目标即可.

2. 情境与试题难度的关系: 在试题设计过程中, 情境的设计要依照试题的考核目标, 同时必须考虑到对试题的影响. 首先是学生对于情境的陌生程度. 这会直接影响学生在分析解决试题的过程中思维的流畅性. 情境越陌生, 学生紧张感越强烈, 同时思维越容易受波动, 越有可能直接影响解题的成功率; 其次情境中信息的干扰程度. 这表现为无用信息的多少程度. 显然这种干扰程度越少, 对学生解题越有利; 最后是情境中对解题有用的相关元素之间的关联程度, 有时候我们又会称其为相关元素之间关联的隐蔽性. 显然隐蔽性越强对学生在信息提取过程中难度要求越高, 试题难度越大.

也正是情境的设计与试题难度之间存在着如此密切的关系, 所以我们必须时刻注意在情境设计中可能带来的"偏差"问题. 这是一个测量学概念, 即试题对一部分群体有利或很简单, 对另一部分群体不利或很难. 对于考试群体中不同的性别、宗教、民族、地区的特点, 情境的设计要非常小心, 特别对于大规模的、高利害性的考试更是如此.

3. 情境的设计和题型的使用. 从测试的角度来看, 情境就是一个刺激物, 合理的情境设计就是要让考生准确体现情境所在试题的测试目标. 对于数学测试, 需要合理体现测试的思维过程, 因此情境的设计, 必须结合题型进行. 一般而言, 对于填空题或选择题, 尽量使得情境简单明了, 而开放题或非常规性试题, 由于需要充分体现学生思维空间和能力层次, 这就需要在情境的设计上呈现动态、多层次性, 如上述例4、例5.

4. 情境的"真实性", 即情境的设计不要违反客观规律. 新的课程标准强调对人的发展性的关注, 评价也如此. 在试题编制过程中, 试题命制人员总希望借助能体现生活实际背景或挖掘数学逻辑内部规律(如例1、2、3)考查学生对学科知识的应用程度, 借此评价学生在实际生活中面临具体问题时, 数学相关知识和技能的运用能力. 这就需要情境的设计符合一般的社会常识和客观规律.

目前仍要注意以下问题:

1. 情境的创新性. 由于情境设计对试题的难度有着直接的影响, 同时又由于在课程标准中对数学应用的要求, 在测试中又不得不有意识地加强对情境的设计, 这在情境设计层面上造成试题编制在教育导向和测试难度之间需要平衡. 为了便于控制难度, 在教材中常见的情境, 如路程、桥拱等问题在试题中一再出现, 这也造成在教学中对相关问题一再强调, 甚至形成解题模式化的特点. 从测试的角度, 该类情境的设计被极大地弱化了, 甚至偏离了其测试的目的, 不能很好地体现学生的数学应用方面的能力, 也不能更多地考查学生对相关知识和技能的识记、理解. 这就需要在情境设计上结合相应测试目标敢于具有一定的创新, 提升测试结果的效度.

2. 进一步认识情境所能产生的认知特点. 情境的使用对于试题的编制, 如同化学反应中的催化剂, 不一定都是非常必要的. 但合理地使用能对试题功能的提升起到画龙点睛的作用. 在问题解决过程中, "真实"的情境能更有利于"刺激"测试群体问题的提出和分析, 这个过程可以体现出学生在认知层面上水平的高低. 如何真正寻求其中所蕴涵的对应关系, 是我们在情境设计中必须更加细化和探讨的.

(上接第3-42页)

$\dfrac{CD}{DF}$或$\dfrac{AD}{DE}$的值).

趣味练习3: 在图1中, 连结AD, 容易发现例题也可以化归为与三角形重心定理基本图相关的图形, 由此图出发, 我们也可以编制一些新问题, 这些问题皆存在着证法成对出现的现象, 具体问题留待读者编制、探究.